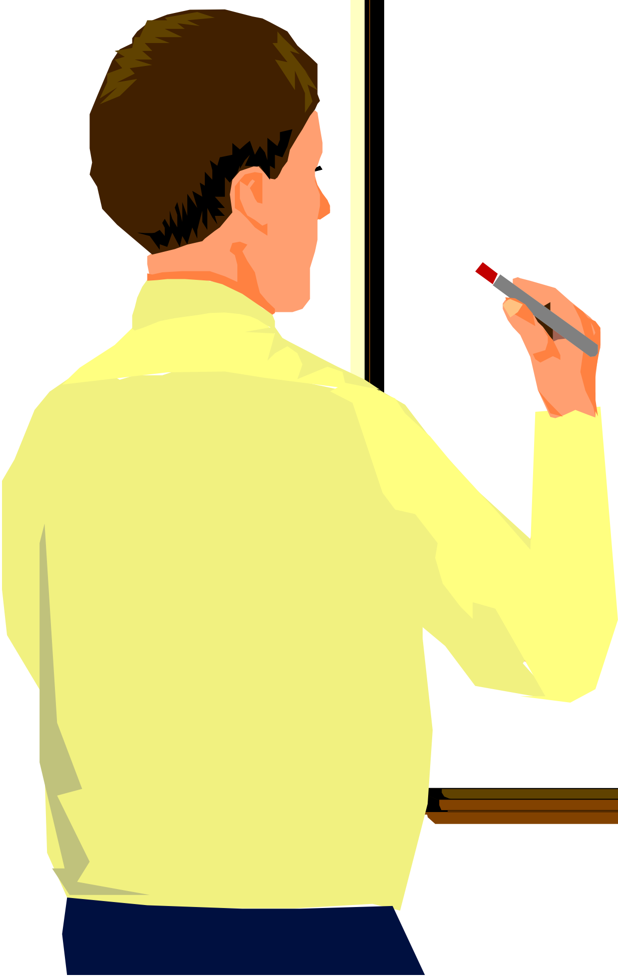


Matematica

Disequazioni di 1° grado

Autore: ***Prof. Pappalardo Vincenzo***
docente di **Matematica e Fisica**

1. DEFINIZIONI

Si dice disequazione di 1° grado un' espressione algebrica nella quale compare il segno di > (maggiore) o < (minore), tra due membri, e l' incognita ha come esponente uno.

Coefficiente dell'incognita

Incognita

$$\underbrace{ax}_{\text{Primo membro}} > \underbrace{b}_{\text{Secondo membro}}$$

Termine noto

La stessa nomenclatura vale per la disequazione $ax < b$

Come le equazioni, anche le disequazioni possono essere classificate in base alle loro caratteristiche:

- **Disequazione algebrica:** disequazione nella quale compaiono le quattro operazioni e l'elevamento ad una potenza razionale.
- **Disequazione intera:** disequazione nella quale l'incognita compare solo al numeratore.
- **Disequazione frazionaria:** disequazione in cui l'incognita compare anche al denominatore.
- **Disequazione razionale:** disequazione in cui l'incognita non compare mai sotto il segno di radice.
- **Disequazione irrazionale:** disequazione in cui l'incognita compare anche sotto il segno di radice.

ESEMPI

$\frac{3}{2}x-4x>-\frac{1}{2}+2x$	Disequazione algebrica, razionale, intera	$\frac{x-1}{2x+4}-\frac{4}{5}<\frac{x-5}{4x+16}-2x$	Disequazione algebrica, razionale, fratta
$\sqrt{3x}-4x+1>\sqrt{2x}-1$	Disequazione algebrica, Irrazionale, intera	$4x-\frac{2x+1}{x-1}+4>\sqrt{7x}-3$	Disequazione algebrica, irrazionale, fratta

2. DISEQUAZIONI INTERE DI 1° GRADO

Il procedimento generale per risolvere una disequazione di 1° grado si basa su due teoremi detti principi di equivalenza, che hanno lo scopo di trasformare una disequazione in altre più semplici, ossia equivalenti, cioè che ammettono la stessa soluzione.

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – Addizionando o sottraendo una stessa quantità ad entrambi i membri della disequazione, si ottiene una disequazione equivalente a quella data (ossia la disequazione non cambia).

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – Moltiplicando o dividendo per una stessa quantità entrambi i membri della disequazione, si ottiene una disequazione equivalente a quella data (ossia la disequazione non cambia).

IMPORTANTE – L'applicazione di questi principi è sostanzialmente identica a quella delle equazioni di 1° grado

PROCEDURA RISOLUTIVA

ESEMPIO

Risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$7x - 6 + 2x + 5 > 2x - 15 + 5x$$

1. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$7x + 2x - 2x - 5x > 6 - 5 - 15$$

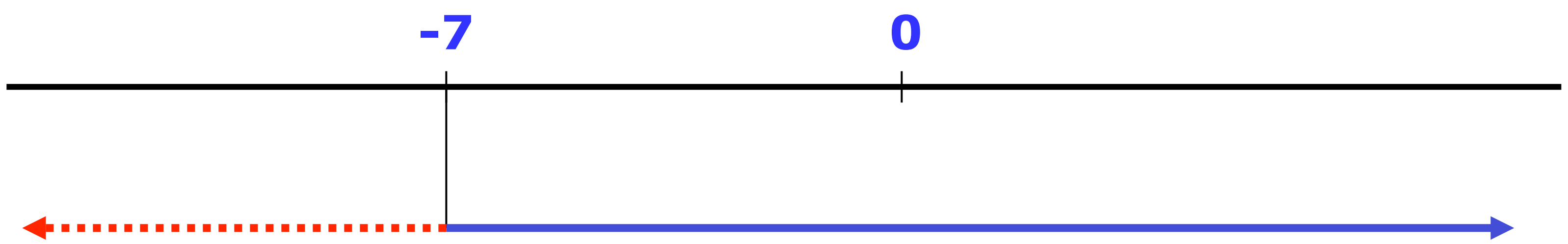
2. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$2x > -14$$

3. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > -\frac{14}{2} \quad \Longrightarrow \quad x > -7$$

Rappresentazione grafica della soluzione



Significato

- *La disequazione è soddisfatta, ossia* primo membro > secondo membro, *solo se l'incognita assume qualunque valore più grande di –7,* (freccia continua **blu)**
- *La disequazione non è soddisfatta, ossia* primo membro > secondo membro, *per tutti i valori più piccoli di –7* (freccia tratteggiata rossa)

Importante–Nelle disequazioni, a differenza delle equazioni, la soluzione non è un singolo valore, ma tutto un intervallo di valori. Pertanto la soluzione dell'esercizio precedente va scritta anche nei seguenti modi:

$$S = (-7;+\infty)$$

Si legge: la soluzione è l'intervallo di valori compresi tra -7 e $+\infty$

La parentesi tonda significa che gli estremi -7 e $+\infty$ non appartengono all'intervallo, ossia non fanno parte della soluzione.Questo intervallo si chiama **intervallo illimitato aperto a sinistra**. Illimitato perché un estremo è l'infinito e aperto a sinistra perché l'estremo sinistro non fa parte dell'intervallo.

$$S = \{\forall x \in \Re \mid x > -7\}$$

Si legge: la soluzione è qualsiasi valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali R tali che x sia maggiore di -7.

Conclusione – Risolvere una disequazione significa trovare l'insieme S delle soluzioni, ossia l'intervallo di valori che, attribuiti all'incognita, soddisfino la disequazione, ossia rendono vera la disuguaglianza tra primo e secondo membro.

ESEMPIO

Risolvere la seguente la seguente disequazione algebrica:

$$(5x+1)^2 - 5(2x+3) \geq (5x-2)(5x+2) + 2x$$

1. Si applicano le regole del calcolo algebrico per eliminare le parentesi e sviluppare i prodotti notevoli:

$$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 \geq 25x^2 - 4 + 2x$$

2. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$\cancel{25x^2} + \cancel{10x} - \cancel{10x} - \cancel{25x^2} - 2x \geq -1 + 15 - 4$$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$-2x \geq 10$$

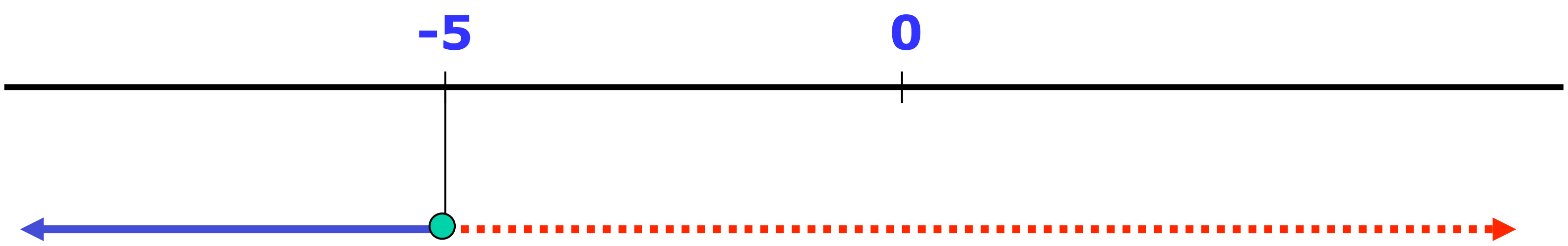
4. Attenzione: si cambia segno all'incognita (solo quando il segno è negativo), e ciò comporta il cambiamento del segno di disuguaglianza e del secondo membro:

$$2x \leq -10$$

5. Si dividono entrambi i membri della disequazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \le -\frac{10}{2} = -5 \quad \Longrightarrow \quad x \le -5$$

Rappresentazione grafica della soluzione



Significato

❖ La disequazione è soddisfatta, ossia **primo membro ≥ secondo membro**, solo se l'incognita assume qualunque valore più piccolo di -5 **(freccia continua blu),** compreso -5, evidenziato dalla pallina.

❖ La disequazione non è soddisfatta, ossia primo membro ≥ secondo membro, per tutti i valori più grandi –5 (freccia tratteggiata rossa).

La soluzione va scritta anche nei seguenti modi:

$S = (-\infty; -5]$

Si legge: la soluzione è l'intervallo di valori compresi tra $-\infty$ e −5.

La parentesi tonda significa che l'estremo $-\infty$ non appartiene all'intervallo, ossia non fa parte della soluzione, mentre la parentesi quadra indica che l'estremo −5 fa parte dell'intervallo di valori che rappresentano la soluzione. Questo intervallo si chiama **intervallo illimitato chiuso a destra.** Illimitato perché un estremo è l'infinito e chiuso a destra perché l'estremo destro fa parte dell'intervallo.

$S = \{\forall x \in \Re | x \leq -5\}$

Si legge: la soluzione è qualsiasi valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali R tali che x sia minore o uguale a −5.

Conclusione – Risolvere una disequazione significa trovare l'insieme S delle soluzioni, ossia l'intervallo di valori che, attribuiti all'incognita, soddisfino la disequazione, ossia rendono vera la disuguaglianza tra primo e secondo membro.

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione algebrica intera: $\frac{3}{2}x - 3 + \frac{5}{4}x < \frac{3}{8} - \frac{1}{4}x + 4$

1. Si effettua il mcm di tutti i denominatori e le conseguenti operazioni:

$$\frac{12x - 24 + 10x}{8} < \frac{3 - 2x + 32}{8}$$

2. Si elimina il mcm (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{12x - 24 + 10x}{\cancel{8}} < \frac{3 - 2x + 32}{\cancel{8}} \Rightarrow 12x - 24 + 10x < 3 - 2x + 32$$

3. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$12x + 10x + 2x < 24 + 3 + 32$$

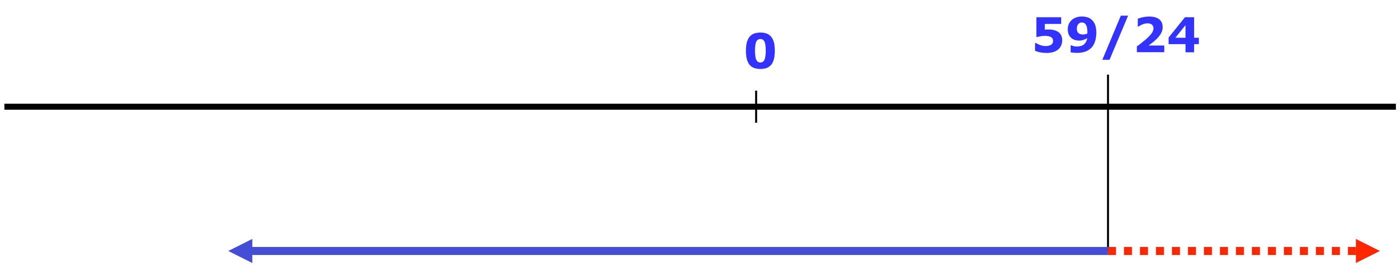
4. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$24x < 59$$

5. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{\cancel{24}x}{\cancel{24}} < \frac{59}{24} \Longrightarrow x < \frac{59}{24}$$

Rappresentazione grafica della soluzione



Significato

- La disequazione è soddisfatta, ossia primo membro < secondo membro, solo se l'incognita assume qualunque valore più piccolo di 59/24 (freccia continua blu).
- La disequazione non è soddisfatta, ossia primo membro < secondo membro, per tutti i valori più grandi 59/24 (freccia tratteggiata rossa).

La soluzione va scritta anche nei seguenti modi:

$$S = \left(-\infty; \frac{59}{24}\right)$$

Si legge: la soluzione è l'intervallo di valori compresi tra $-\infty$ e 59/24.

Le parentesi tonde indicano che gli estremi dell'intervallo non fanno parte della soluzione. Questo intervallo si chiama **intervallo illimitato aperto a destra**. Illimitato perché un estremo è l'infinito e aperto a destra perché l'estremo destro non fa parte dell'intervallo.

$$S = \left\{\forall x \in \Re \middle| x < \frac{59}{24}\right\}$$

Si legge: la soluzione è qualsiasi valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali R tali che x sia minore a 59/24.

Conclusione – Risolvere una disequazione significa trovare l'insieme S delle soluzioni, ossia l'intervallo di valori che, attribuiti all'incognita, soddisfino la disequazione, ossia rendono vera la disuguaglianza tra primo e secondo membro.

3. DISEQUAZIONI FRATTE

In una **disequazione frazionaria** l'incognita compare anche al denominatore. Studieremo quelle disequazioni frazionarie nelle quali al numeratore ed al denominatore compaiono polinomi di 1° grado.

PROCEDURA RISOLUTIVA

ESEMPIO

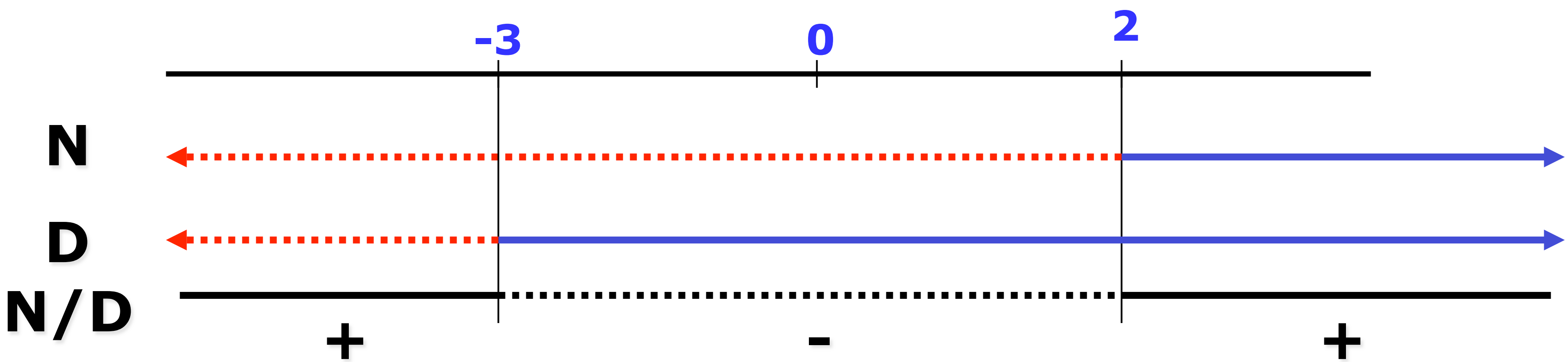
Risolvere la seguente disequazione fratta: $\frac{3x-6}{5x+15}>0$

1. Si impone sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero e si risolvono separatamente le due disequazioni:

$$N \Rightarrow 3x-6>0 \Rightarrow 3x>6 \Rightarrow x>\frac{6}{3}=2 \Rightarrow x>2$$

$$D \Rightarrow 5x+15>0 \Rightarrow 5x>-15 \Rightarrow x>-\frac{15}{5}=-3 \Rightarrow x>-3$$

2. Si riportano su uno stesso grafico le due soluzioni, e si analizza il segno di ogni intervallo, prendendolo positivo laddove N e D sono concordi (stesso segno) e negativo laddove N e D sono discordi (segno opposto). Per convenzione la freccia tratteggiata verrà considerata negativa e quella continua positiva:



Dall'esame del grafico discende che il rapporto tra N e D è:

- Positivo nell'intervallo $(-\infty\ ; -3)$ e nell'intervallo $(2; +\infty)$
- Negativo nell'intervallo $(-3; 2)$

Poiché la nostra disequazione chiedeva che il rapporto tra N e D fosse positivo, allora la soluzione si ha per:

$x < -3$ **e** $x > 2$ **ossia** $\Rightarrow$ $S = (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$

Dove il simbolo U indica l'unione dei due intervalli

ESEMPIO N. 2

Per risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{6-3x}{4x-16}<0$$

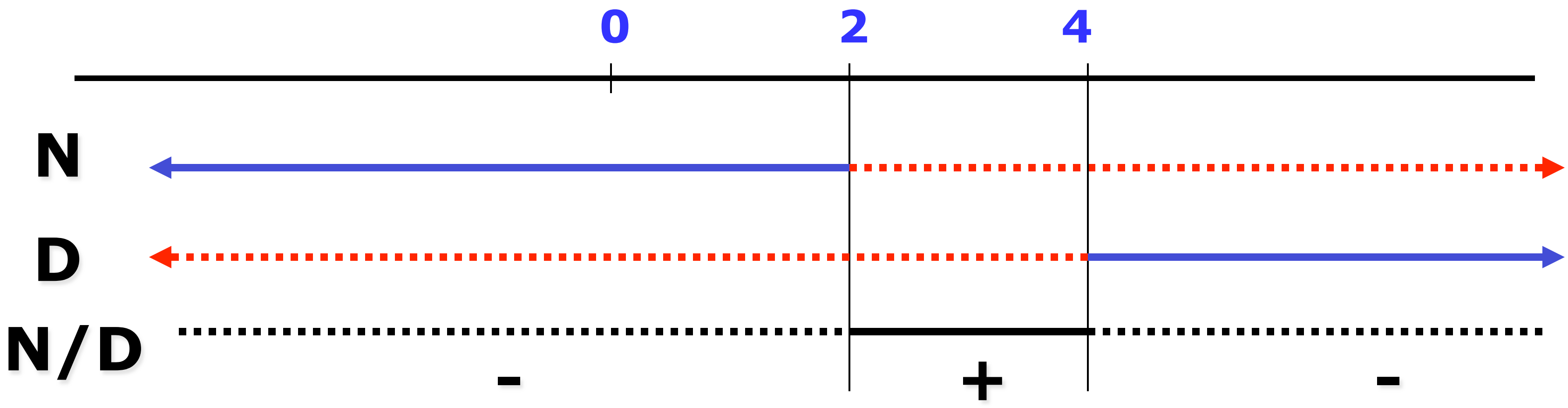
si deve procedere come segue:

1. Si impone sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero e si risolvono separatamente le due disequazioni:

$$N \Rightarrow 6-3x>0 \Rightarrow -3x>-6 \Rightarrow 3x<6 \Rightarrow x<2$$

$$D \Rightarrow 4x-16>0 \Rightarrow 4x>16 \Rightarrow x>4$$

2. Si riportano su uno stesso grafico le due soluzioni, e si analizza il segno di ogni intervallo, prendendolo positivo laddove N e D sono concordi (stesso segno) e negativo laddove N e D sono discordi (segno opposto). Per convenzione la freccia tratteggiata verrà considerata negativa e quella continua positiva:



Dall'esame del grafico discende che il rapporto tra N e D è:

- **Positivo nell'intervallo (2; 4)**
- **Negativo nell'intervallo (- ∞ ; 2) e nell'intervallo (4; +∞)**

Poiché la nostra disequazione chiedeva che il rapporto tra N e D fosse negativo, allora la soluzione si ha per:

$x < 2$ **e** $x > 4$ **ossia** ⟹ $S = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

Dove il simbolo U indica l'unione dei due intervalli

Menu

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione fratta: $$\frac{6-3x}{4x-16}-\frac{1}{2}>\frac{3}{x-4}$$

1. Si portano al primo membro tutti i termini del secondo membro cambiati di segno:

$$\frac{6-3x}{4x-16}-\frac{1}{2}-\frac{3}{x-4}>0$$

2. Si effettua la scomposizione dei denominatori:

$$\frac{6-3x}{4\cdot(x-4)}-\frac{1}{2}-\frac{3}{x-4}>0$$

3. Si effettua il mcm ed i relativi calcoli algebrici:

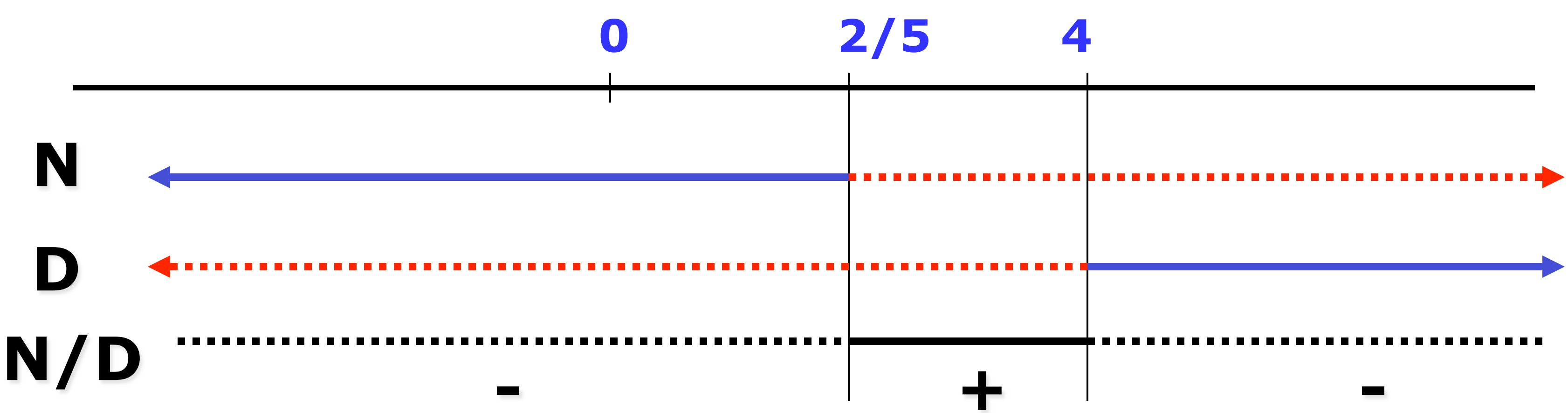
$$\frac{6-3x-2\cdot(x-4)-12}{4\cdot(x-4)}>0 \Rightarrow \frac{6-3x-2x+8-12}{4\cdot(x-4)}>0 \Rightarrow \frac{-5x+2}{4x-16}>0$$

4. Si impone sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero e si risolvono separatamente le due disequazioni:

$$N \Rightarrow -5x + 2 > 0 \Rightarrow 5x - 2 < 0 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$$

$$D \Rightarrow 4x - 16 > 0 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x > 4$$

5. Si riportano su uno stesso grafico le due soluzioni, e si analizza il segno di ogni intervallo, prendendolo positivo laddove N e D sono concordi (stesso segno) e negativo laddove N e D sono discordi (segno opposto). Per convenzione la freccia tratteggiata verrà considerata negativa e quella continua positiva:



6. La soluzione che rende **N/D >0,** come richiesto dall'esercizio, è:

$$\frac{2}{5} < x < 4 \quad \text{ossia} \quad \Rightarrow \quad S = \left(\frac{2}{5};4\right)$$

4. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

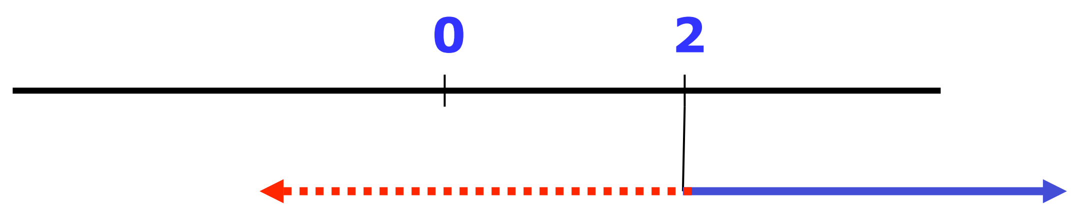
Un sistema di disequazioni è formato da due o più disequazioni che possono essere intere o fratte. Affinché sia risolto il sistema, devono essere risolte *contemporaneamente* tutte le disequazioni che lo compongono.

ESEMPIO

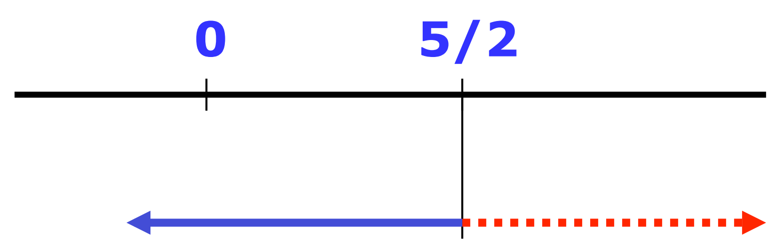
Per risolvere il seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 3x - 1 < 4 + x \\ 2x - 1 < x + 3 \end{cases}$

1. Si risolvono, separatamente, le singole disequazioni che formano il sistema:

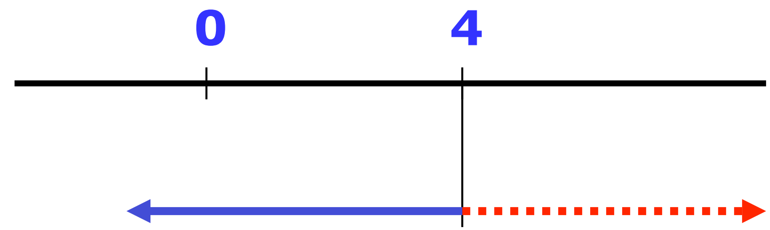
$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$



$$3x - 1 < 4 + x \Rightarrow 3x - x < 1 + 4 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$$

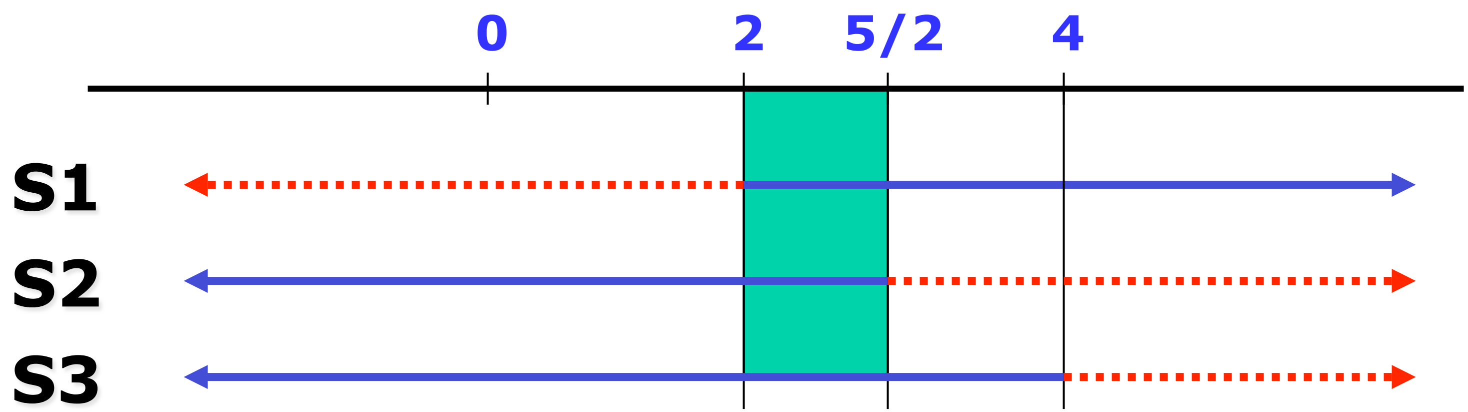


$$2x - 1 < x + 3 \Rightarrow 2x - x < 1 + 3 \Rightarrow x < 4$$



2. Si riportano in un unico grafico le singole soluzioni:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < \dfrac{5}{2} \\ x < 4 \end{cases}$$



3. La soluzione del sistema sarà data da quell' intervallo di valori che soddisfa tutte e tre le disequazioni (graficamente significa individuare la zona, quella verde, in cui tutte e tre le linee continue, cioè quelle blu, si sovrappongono):

$$S = \left(2; \frac{5}{2}\right)$$ oppure $$S = \left\{ \forall x \in \Re \,\middle|\, 2 < x < \frac{5}{2} \right\}$$ o più semplicemente $$2 < x < \frac{5}{2}$$

ESEMPIO

Risolvere il seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} \dfrac{6-3x}{4x-16} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{x-4} \\ 5\cdot(x-2) < 4\cdot(2x-3)+2 \end{cases}$

1. Si risolvono, separatamente, le singole disequazioni che formano il sistema:

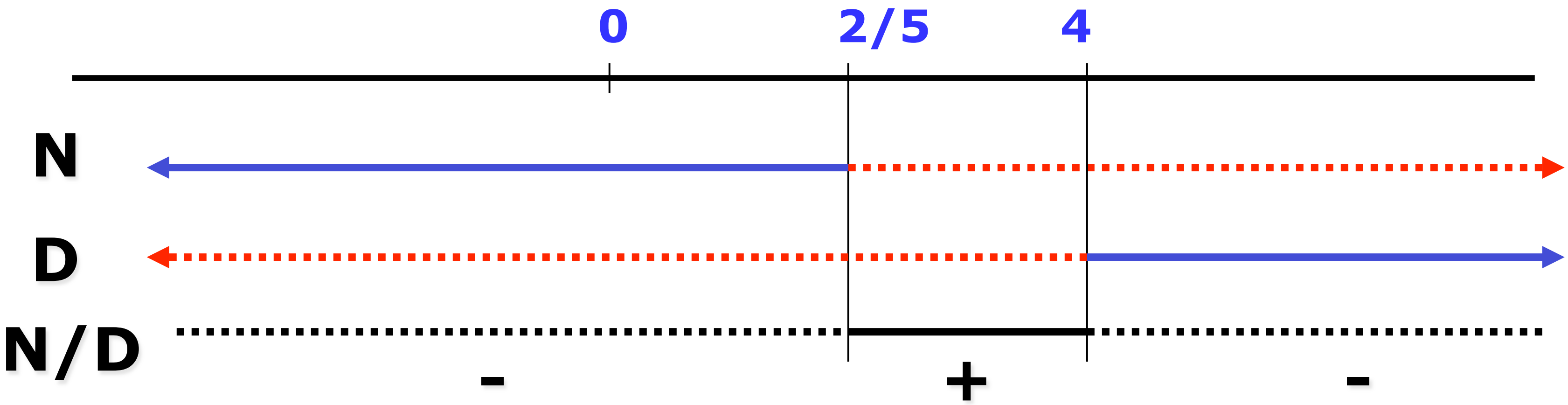
Prima equazione

$$\frac{6-3x}{4x-16} - \frac{1}{2} - \frac{3}{x-4} > 0 \Rightarrow \frac{6-3x}{4\cdot(x-4)} - \frac{1}{2} - \frac{3}{x-4} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{6-3x-2\cdot(x-4)-12}{4\cdot(x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{6-3x-2x+8-12}{4\cdot(x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{-5x+2}{4x-16} > 0$$

$$N \Rightarrow -5x+2 > 0 \Rightarrow 5x-2 < 0 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$$

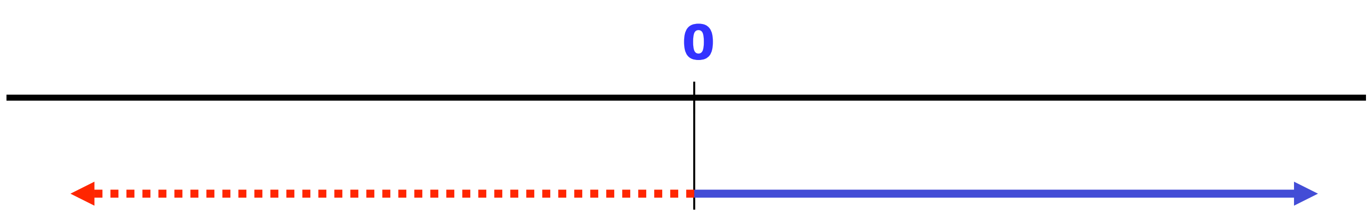
$$D \Rightarrow 4x-16 > 0 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x > 4$$



$$S=\left(\frac{2}{5};4\right)$$ o più semplicemente $$\frac{2}{5}<x<4$$

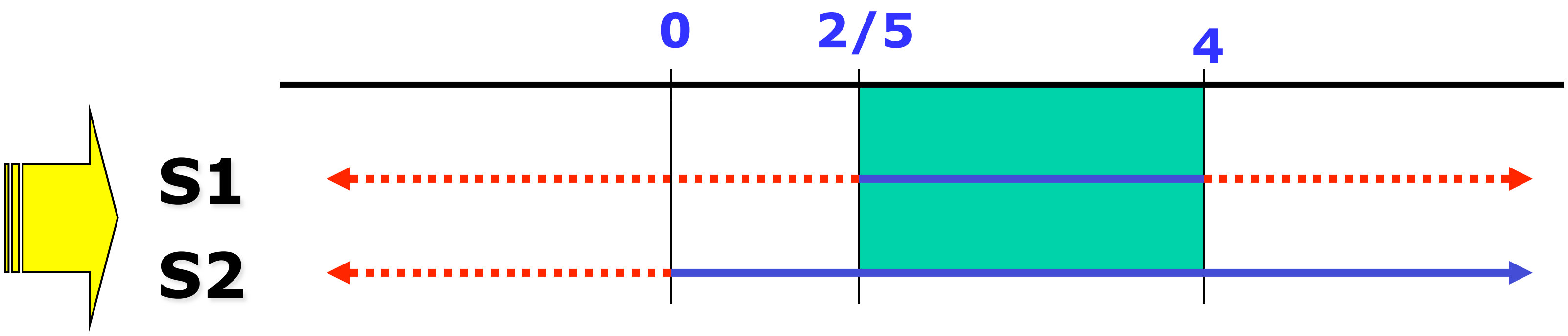
Seconda equazione

$$5\cdot(x-2)<4\cdot(2x-3)+2\Rightarrow 5x-10<8x-12+2\Rightarrow 5x-8x<10-12+2\Rightarrow$$
$$-3x<0\Rightarrow 3x>0\Rightarrow x>0$$



2. Si riportano in un unico grafico le singole soluzioni:

$$\begin{cases} \frac{2}{5} < x < 4 \\ x > 0 \end{cases}$$



3. La soluzione del sistema sarà data da quell'intervallo di valori che soddisfano tutte e due le disequazioni (graficamente significa individuare la zona, quella verde, in cui tutte e due le linee continue, cioè quelle blu, si sovrappongono):

$$S = \left(\frac{2}{5};4\right) \qquad \text{oppure} \qquad S = \left\{\forall x \in \Re \left| \frac{2}{5} < x < 4 \right.\right\}$$

o più semplicemente $\frac{2}{5} < x < 4$